

名詞解說專欄

30. 破壞準則(Failure Criteria)

吳 偉 特 *

「破壞準則」一詞係指某一固體材料（金屬、岩石、混凝土、土壤等）破壞時，該破壞平面上應力情況之關係；一般可以數學式表示之：

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

式中 σ_1 ， σ_2 與 σ_3 分別為最大，中間與最小主應力，故上式代表位於主應力軸空間(Principal Stress Space)(三個軸座標分別為 σ_1 ， σ_2 與 σ_3)中之破壞表面(Yield Surface)；當任一組應力座落於該破壞表面上時，該固體材料處於極限平衡狀態。

此外，破壞準則亦可視為最大主應力 σ_1 之尖峰值，與圍壓值 σ_3 之變化關係：

$$\sigma_1 = f(\sigma_3)$$

在大地工程中，一般考慮土壤與岩石之破壞準則，常用之表示式子，為剪力強度與主應力間之關係式：

$$\tau = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

一般傳統之三軸試驗，最小主應力 σ_3 與中間主應力 σ_2 兩者相等，係以圍壓（其值為 σ_3 ）施加於試體上進行試驗。

上述式子中，當 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 =$ 定值時，則此平面將垂直於靜水應力軸(Hydrostatic Stress Axis)（或稱等向應力線(Insotropic Stress Line)）($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)，且此平面稱之為軸差平面(Deviator Plane)（圖一），並有8個組合面構成一個八面體；在此八面體之任一面剪應力與正應力分別為：

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

上式之主應力亦可分別以有效主應力 $\bar{\sigma}_1$ ， $\bar{\sigma}_3$ 與 $\bar{\sigma}_3$ 表示之。

因此，該軸差平面與破壞表面之交線，即稱之為破壞軌跡(Failure Locus)；若破壞表面假設為一圓柱體時，則破壞軌跡成為一圓形，且若任一組應力座落於破壞軌跡時，表示已趨近於破壞。

由上述得之，一般習用之各種破壞準則，即基於不同之假設，而產生不同之準則，因之有其不同之適用應力範圍；茲將一般用於土壤與岩石之破壞準則簡述如下：

(一) 土壤之破壞準則：

(1) Von Mises 準則(1913)係假設八面體上之剪應力 τ_{oct} ，等於臨界值時產生破壞，其破壞軌跡為圓形。

(2) Tressa 準則(1868)係假設材料上某點之最大剪應力 τ_{max} 等於臨界值時產生破壞，其破壞軌跡為規則形狀之六角形；上述兩種準則由於忽略強度中靜水應力分量之作用，故並不適用於一般土壤情況，但可適用於金屬材料，可預測在高靜水圍壓作用下之延性(Ductile)破壞。

(3) Mohr-Coulomb 準則之假設，係在材料中任一平面上某點之剪應力 τ ，等於某一數值；而此數值大小與作用在該平面上之正應力成線性關係；此準則在土壤力學中最為普遍採用，其材料性質參數即為土壤力學中之剪力強度參數 c 與 ϕ 值；其破壞軌跡為不規則之六角形。

茲將上述三種破壞準則之破壞軌跡，示於

* 國立台灣大學土木工程學系教授

圖二；圖中除顯示其不同之形狀外，其預測強度以 Von Mises 準則最高，Tressa 準則次之，而以 Mohr-Coulomb 準則最低。

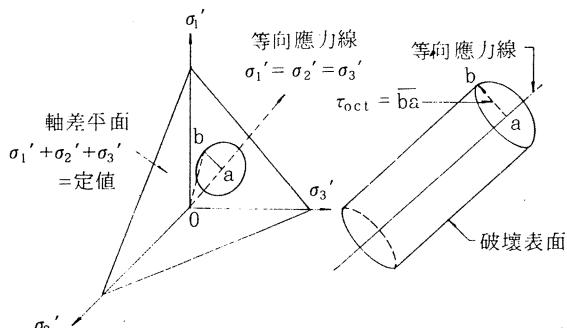
(4) Lade 與 Duncan 準則(1975)，即基於實驗室在靜水壓力分量之作用下三軸試驗結果，可得到砂土之強度特性，諸如靜水壓力之靈敏度，中間主應力之作用影響，破壞表面軸差平面之非弧形軌跡等。

(5) Druchen-Pragen 準則(1952)，則為 Von Mises 準則之延伸，即考慮靜水壓應力分量因素；故其兩個材料參數與 Mohr-Coulomb 準則之參數 c 與 ϕ 互有關係式，且其破壞表面較為平滑，而非為多角形狀；該準則亦考慮中間主應力之影響。

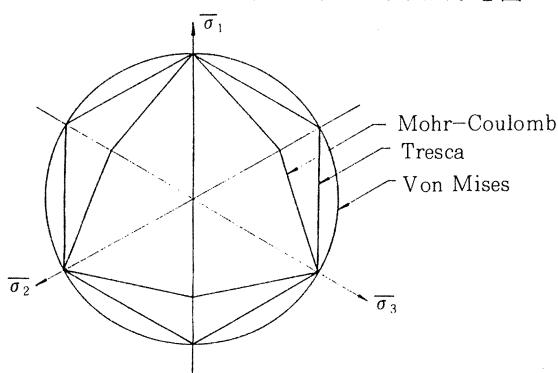
(6) Lade Two Parameter 準則(1977)，係將材料破壞包絡線隨圍壓增加呈弧線之變化關係考慮入內；有關其兩個參數可從三軸壓縮試驗中求出；適用於非凝聚性土壤與正常壓密黏土之破壞應力。

(二) 岩石之破壞準則

有關岩石之材料破壞，可分為脆性(Brittle)與延性；圍壓之增加可使岩石材料由脆性



圖一 軸差平面，等向應力線與破壞表面示意圖



圖二 軸差平面上破壞軌跡之比較

趨於延性；岩石破壞時，滑動抗力大於分離抗力而導致小量變形之破壞，稱為脆性；破壞時分離抗力大於滑動抗力而導致大量變形之破壞，稱為延性；一般岩石材料在三軸應力狀況下，並無純張力或純剪力破壞，係隨圍壓之變化而改變兩者間之比例關係。

有關岩石之各種破壞準則，在不同圍壓下之適用範圍皆有不同；一般可以岩石之三軸試驗結果，逐一檢討各破壞準則適用之圍壓範圍，並描述最大主應力與最小主應力之關係。

(1) Griffith 準則(1924) 係假設橢圓裂縫受應力後，由於張應力產生之裂縫延伸而導致破壞。

(2) Coulomb 準則(1776) 係將材料之剪力強度分為兩個分量，分別為凝聚力與摩擦力，而以參數凝聚力截距 c 與內摩擦角 ϕ 表示之。

(3) Griffith 修正破壞準則(Mcclintock & Walsh, 1962)，係將 Griffith 之理論加以修正，可應用於壓力區，以考慮裂縫受壓力閉合時之裂縫間摩擦剪力影響。

(4) 指數法則(Power Law) 破壞準則，係將最大主應力與最小主應力關係，以指數式子表示之：

(i) Murrell 指數法則(Murrell, 1965., Bieniawski, 1974)

$$\left(\frac{\sigma_1}{q_u}\right)^M = 1 + N \left(\frac{\sigma_3}{q_u}\right)^M$$

(ii) Hoek 指數法則(1968)

$$\tau_{\max} = \tau_{\max_0} + A \sigma_m^b$$

$$\text{式中 } \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\tau_{\max_0} = \sigma_t$$

(iii) Hobbs 指數法則(1964)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = q_u + F \sigma_3^f$$

上式中 σ_1, σ_3 為最大與最小主應力

q_u 為單軸壓縮強度

σ_t 為張力強度

M, N, A, b, F, f 為常數

(5) Hoek & Brown 經驗破壞準則(1980)，係收集數百個三軸試驗資料，以統計方法得到之經驗公式，其中兩個參數定義與 Mohr-Coulomb 準則之強度參數相似；本準則適用於

含地質弱面之岩體，尤其適用於隧道周邊岩體應力分佈之情況。

(6) 國際岩石力學學會建議方法(Brown, 1981)，係將三軸試驗之破壞包絡線分為數段，各以直線簡化之，而以各直線之斜率與截距，可換算成庫倫準則之參數 c 與 ϕ 。

(7) Kim & Lade 三維破壞準則(1984)，係主要將適用於土壤之 Lade 破壞準則之兩個參數，修正為三個參數，使適用於具有抗張強度之岩石材料。

楊裕鴻(1985)曾針對台灣南港砂岩，草嶺砂頁岩互層與北勢溪硬頁岩，進行三軸試驗，

單軸壓縮試驗與間接法抗張試驗；研究分析岩石由零圍壓至較高圍壓之各種破壞準則適用性；顯示 Griffith 準則適用於張力區，當使用於壓力區時誤差 50%左右；Coulomb 準則之直線關係，在圍壓小於單軸壓縮強度之二分之一時可適用之；當圍壓大於單軸壓縮強度之二分之一以上時，則可採用國際岩石力學學會之建議方法；Hoek & Brown 準則適用於張力區及圍壓小於單軸壓縮強度之情況；至於圍壓大於單軸壓縮強度之應力狀況，則可採用 Murrell 準則，Hoek 指數準則與楊裕鴻建議之經驗公式。

31. 摩耳——庫倫破壞準則 (Mohr—Coulomb Failure Criteria)

摩耳—庫倫破壞準則，對於了解土壤破壞行為特性，在土壤力學中最為普遍採用；幾乎有關大地工程之基礎承載力，擋土牆側向土壓，邊坡穩定等問題，皆應用到摩耳—庫倫之破壞準則。

實際上，它是由庫倫經驗定律(Coulomb's Empirical Law)(Coulomb, 1776)與摩耳理論(Mohr Theory)(Mohr, 1900)組合而成；至於到底是何人何時將兩者組合在一起，目前已無從考證，但却成為了大地工程中從事研究土壤剪力強度強而有力的工具！

庫倫可謂多才多藝，除了著名的貓皮毛與黑檀樹桿研究外，對於土壤亦開始進入了他的研究領域，始於 1776 年；當時由於法國軍事防衛系統之有關城堡要塞防衛措施，絕大多數皆因設計與施工不佳而破壞；因此庫倫開始研究有關擋土牆側向土壓之問題，他提供了一套方法分析設計擋土牆之側向土壓，至今仍被廣泛採用。

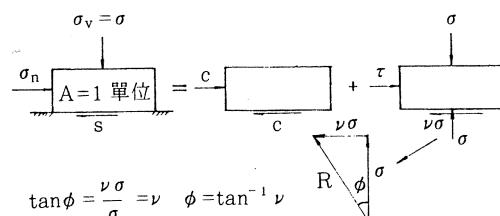
庫倫為求土壤之剪力強度，遂針對不同材料之滑動摩擦特性，設計儀器測定土壤之抗剪阻力，從試驗結果中庫倫觀察到土壤之剪力強度，由獨立應力分量(Stress-independent Component)與依屬應力分量(Stress-Dependent Component)兩者組成，前者似乎與材料之內凝聚力有關，與作用在破壞面上之正應力

無關，而受顆粒間之吸引力影響，遂以凝聚力 c 表示之；後者與固體間之滑動摩擦相似，與正應力有關，庫倫定義其為內摩擦角 ϕ (圖三(a))。

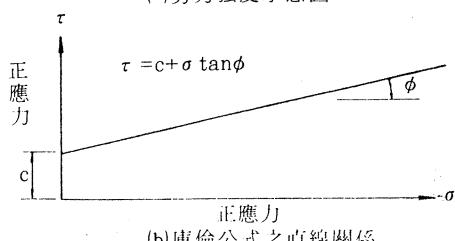
因此，庫倫遂假定土壤之剪力強度，可將兩者疊加以方程式表示之：

$$\tau_f = c + \sigma \tan\phi$$

式中 τ_f 為破壞面上破壞時之剪力強度， σ 為作用之正應力， c 與 ϕ 為剪力強度參數；若以圖形表示則為直線關係(圖三(b))；該直線與縱座標(剪力)之截距即為 c 值，該直線之斜率即為 ϕ 值；上述式子之表示為經驗式



(a) 剪力強度示意圖



圖三 庫倫經驗定律

，實際上合理的使用庫倫公式，應當了解許多影響土壤剪力強度之因素，同時亦須知曉剪力強度參數 c 與 ϕ ，並不為定值常數，其數值變化隨應力之作用情況與排水現象而定。

摩爾於 1887 年提出摩氏應力圓觀念，可代表任一材料元素中任一點之應力情況（圖四）；並於 1900 年提出材料破壞準則，即當材料中破壞時，在破壞面上之剪應力與正應力關係式為：

$$\tau_f = f(\sigma_{ff})$$

式中 τ 為剪應力， σ 為正應力，第一個 f 為「破壞面」，第二個 f 為「破壞」；故 τ_{ff} 即為材料之剪力強度，上述之關係可以圖五(a)表示之。

因此，根據土壤破壞時之作用主應力，可畫出摩氏圓，並可依據幾組不同之土壤試體，求出每一試體破壞時之摩氏圓（圖五(b)）；由於摩氏圓皆為破壞時作用主應力之組合關係，故可畫出剪應力之界限或破壞包絡線，此即稱之為摩氏破壞包絡線(Mohr Failure Envelope)，可代表土壤破壞時剪應力 τ_{ff} 與正應力 σ_{ff} 之函數關係；一般土壤之摩氏破壞包絡線為略呈弧狀曲線。

由前述得知，究竟何人何時將庫倫公式與摩氏破壞準則合而為一，已無從知曉，但兩者的組合却在土壤學中佔了一個非常重要的地位；一般為簡化起見，皆採用近似直線式表示摩爾之破壞包絡線，遂成立了土壤學中有名的摩氏—庫倫破壞準則：

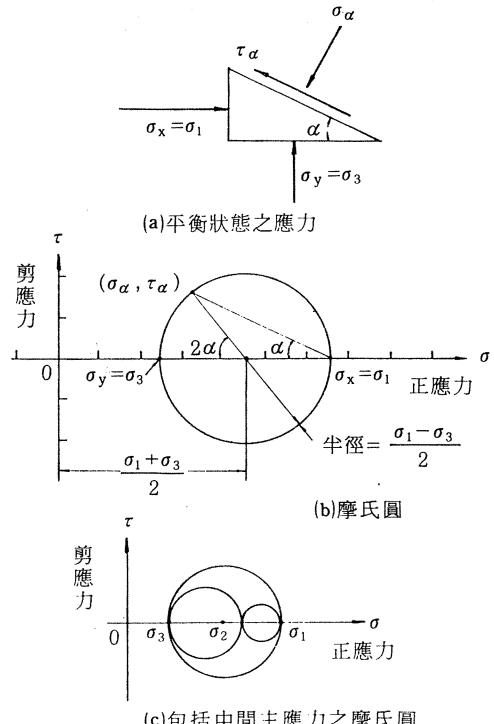
$$\tau_{ff} = c + \sigma_{ff} \tan \phi \quad \text{——總應力分析}$$

$$\tau_{ff} = c + \sigma_{ff} \tan \phi \quad \text{——有效應力分析}$$

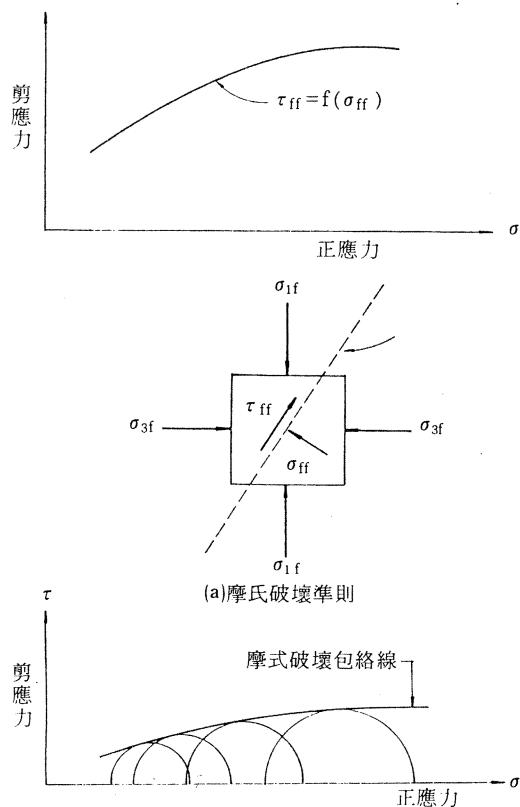
這個簡單且容易使用的破壞準則，對於大地工程中許多工程破壞現象之分析工作十分便利；諸如基礎破壞，擋土牆破壞，邊坡穩定之破壞面上之應力情況，皆可加以應用。

由於破壞包絡線之採用直線適用範圍，僅限於有限範圍之低圍壓區域，對於高圍壓區域作用之情況，將使得內摩擦角 ϕ 值降低；因此 Skempton(1961) 建議採用內在摩擦角(Angle of Intrinsic Friction) ψ 之表示方法（圖六）：

$$\tau_{ff} = K + \sigma \tan \psi$$



圖四 摩氏應力圓觀念

圖五 土壤破壞時之剪應力 τ_{ff} ，正應力 σ_{ff} 與摩氏圓關係

式中 ψ 為高圍壓破壞包絡線之截距

砂性土壤在試驗室中決定內摩擦角 ϕ 時，施加之外力能量，係由顆粒間之摩擦抗力與顆粒間相對移動時體積之鼓脹(Dilatancy)作用共同承當(Rowe, 1962)；故內摩擦角可表示為：

$$\phi = \phi_\mu + \beta$$

式中 ϕ_μ 為顆粒表面之滑動摩擦角， β 為顆粒間結合之影響作用。

對於擋土牆設計與邊坡穩定分析之問題，其破壞現象屬於平面應變情況(Plane Strain Condition)，亦即在中間主應力作用方向之應變等於零；Lee(1970)曾對緊密砂土進行三軸試驗與平面應變試驗之比較，得出下列關係式：

$$\phi_p = \phi_t + 2^\circ + 0.1(\text{Dr} - 50)$$

式中 ϕ_p 與 ϕ_t 分別為平面應變排水試驗與三軸排水試驗之內摩擦角，Dr 為相對密度值

此外，對於三軸試驗之 ϕ_t 值小於 34° 時，Ladd et al(1977)建議 ϕ_p 即等於 ϕ_t ，但在 ϕ_t 大於 34° 時，採用 $\phi_p = 1.5\phi_t - 17^\circ$ 求取之。

對於長條形基礎(Strip Foundation)承載力之內摩擦角 ϕ ，可採用 $\phi \approx \phi_p \approx 1.1\phi_t$ ；對於長方形基礎則可採用 Meyerhof(1963)之建議值：

$$\phi = (1.1 - 0.1 \frac{B_f}{L_f}) \phi_t$$

式中 B_f 與 L_f 分別為基礎之寬度與長度

由於凝聚力為顆粒間之物理一化學鍵作用力(Physico-Chemical Bond Forces)，此與顆粒間排列位置及孔隙比有關，故 Hvorslev(1937)建議土壤之剪力強度應為：

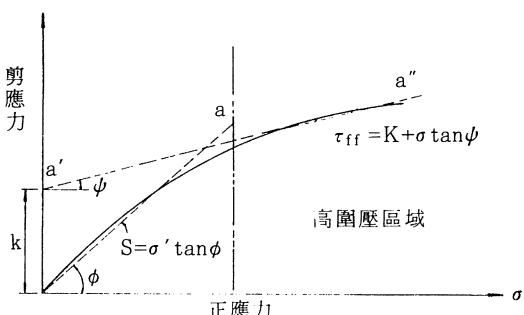
$$\tau = c_e + \sigma \tan \phi_e$$

式中 c_e 與 ϕ_e 分別為土壤之真凝聚力(True Cohesion)與真摩擦角(True Angle of Friction)，並與土壤之孔隙比或含水量有關；有關 c_e 與 ϕ_e 之求法(圖七)，可分別進行三個相同黏土試體之壓密不排水式三軸試驗；第二個與第三個試體代表正常壓密情況，第一個試體代表過份壓密情況，但與第二個試體之含水量與孔隙比相同；則由第二與第三個試體之摩爾圓可求出內摩擦角 ϕ ，而由第一與第二個試體之摩爾圓得出真凝聚力 c_e 與真摩擦角 ϕ_e 。

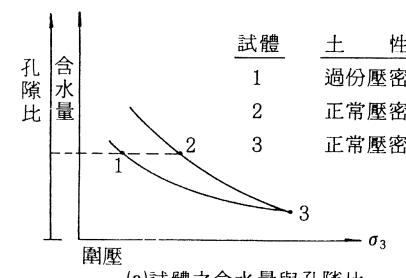
Gibson(1953)研究得出黏性土壤之真摩擦角 ϕ_e 隨孔隙比而略有變化，且隨塑性指數之增加而遞減(圖八)；Hvorslev(1960)則研究得出真凝聚力 c_e 隨孔隙比之變化關係式為：

$$c_e = c_0 e^{-B(\epsilon)}$$

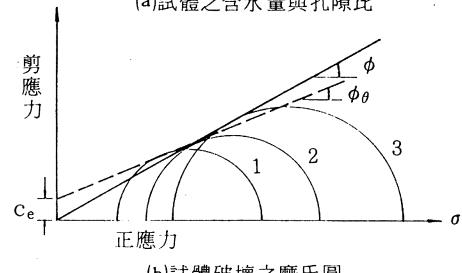
式中 c_0 為孔隙比等於零時之真凝聚力， ϵ 為破壞時之孔隙比， B 為破壞時孔隙比與半對數座標 c_e 關係曲線之斜率。



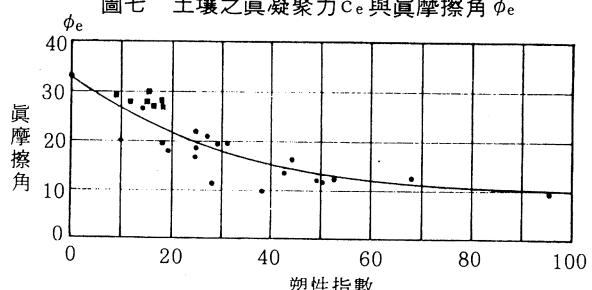
圖六 高圍壓區域破壞之破壞包絡線



(a)試體之含水量與孔隙比



(b)試體破壞之摩爾圓



圖八 真摩擦角 ϕ_e 與塑性指數之關係
(取自 Gibson, 1953)

參 考 文 獻

- 楊裕鴻(1985)“岩石材料破壞準則之研究”台大土木工程研究所碩士論文。
- BIENIAWSKI, Z. T. (1974) “Estimating the Strength of Rock Materials”, *Journal of the S. A. Institute of Mining and Metallurgy*, March, pp. 312-320.
- BROWN, E. T. editor (1981) “*Rock Characterization Testing and Monitoring ISRM Suggested Methods*”, London, England
- COULOMB, C. A. (1776) “Essai Sur une Application des regles des Maximis et Minimis a Quelques Problèmes des Statique Relatifs a L'Architecture”, *Mem. Acad. Roy. Pres. Divers Savants, Paris*, Vol. 7
- DRUCKER, D. C. (1953) “Limit Analysis of Two- and Three-Dimensional Soil Mechanics Problems”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, pp. 217-226.
- HOEK, E. and BROWN, E. T. (1980) *Underground Excavations in Rock, Institute of Mining and Metallurgy*, pp. 87-182
- HOEK, E. (1968) “Brittle Fracture of Rock”, *Rock Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons, London, pp. 93-124.
- HOBBS, D. W. (1964) “The Strength and The Stress-Strain Characteristics of Coal in Triaxial Compression”, *J. Geol.*, Vol. 72 No. 2 March, pp. 214-231
- HVORSLEV, M. J. (1937) “Über Die Festigkeitseigenschaften Gestorfer Bindinger Boden”, *Ingeniorvidenskabelige Skrifter*, No. 45, Danmarks Naturvidenskabelige Samfund, Kovenhavn
- HVORSLEV, M. J. (1960) “Physical Component of the Shear Strength of Saturated Clays”, *Proc. Res. Conf. Shear Strength Cohesive Soils, ASCE*, pp. 169-173
- GIBSON, R. E. (1953) “Experimental Determination of True Cohesion and True Angle of Internal Friction in Clay”, *Proc. 3d Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Zurich*, Vol. 1, pp. 126
- GRIFFITH, A. A. (1924) “The Theory of Rupture”, *Proc. 1st Int. Cong. Appl. Mech.*, Delft, pp. 55-63
- KIM, M. K. and LADE, P. V. (1984) “Modelling Rock Strength in Three Dimensions”, *Handbook on Mechanical Properties of Rock*, Vol. 1, Trans. Tech. Phblication, Germany
- LADD, C. C. ET AL. (1977) “Stress-Deformation and Strength Characteristics”, *State-of Art Report, 9th ICSMFE*, Vol. 2, pp. 421-494
- LADE, P. V. (1977) “Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces”, *Int. of J. of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 1019-1035
- LADE, P. V. and DUNCAN, J. M. (1975) “Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil”, *JOGED, ASCE*, Vol. 101, No. GT10, pp. 1037-1053
- LEE, K. L. (1970) “Comparison of Plane Strain and Triaxial Tests on Sand”, *JSMFD, ASCE*, Vol 96, No. SM3, pp. 901-923
- MCCLINTOCK, F. A. and WALSH, J. B. (1962) “Friction on Griffith Cracks in Rocks Under Pressure”, *Proc. 4th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, Berkeley, California, Vol. 2, pp. 1015-1021
- MOHR, O. (1887) “Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Tragheitsmomenten ebener Flächen”, *Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik*, 2nd ED., W. Ernstu. Sohn, Berlin, pp. 90-109
- MOHR, O. (1900) “Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials”, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 44, pp. 1524-1530

- MURRELL, S. A. (1963) "A Criterion for Brittle Fracture of Rocks and Concrete under Triaxial Stress and the Effect of Pore Pressure on the Criterion", *Proc. 5th U. S. Rock Mechanics Symp.* Minneapolis, pp. 563-573
- MEYERHOF, G. G. (1963) "Some Recent Research on the Bearing Capacity of Foundations", *Can. Geotech. J.*, Vol. 1, pp. 16-26
- ROWE, P. W. (1962) "The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assem-
- bly of Particles in Contact", *Proc. Roy. Soc. A269*, pp. 500-527
- SKEMPTON, A. W. "Effective Stress in Soils, Concrete and Rock", *Pore Pressure Suction in Soils*, Butterworths, London, pp. 4-16
- TRESCA, H. (1968) "Memoire sur L'Ecoulement des Corps Solids", *Mem. Pres. Par Div. Sav.*, Vol. 18
- VON MISES, R. (1913) "Mechanik der festen Körper in Plasticdeformablen Zustand", *Goettinger-Nachr. Math-Phys. KI*