

本問題與解答專欄將定期於本刊登出，所擬問題均選自目前大地工程界於施工中可能遭遇之些疑難小問題，此類問題雖小，但常造成施工人員之困擾。本欄歡迎名讀者提出問題，並歡迎學者專家就解答內容提供意見。有鑑於大地工程牽涉範圍及變化甚多，讀者亦請避免將本欄提供之解答視為唯一方案，以免造成施工或尋求解決方法之錯誤。

Q 34：一般工程計算基樁允許側向力支承力時，其應用公式為何？（台北縣永和市翁駿德先生提出）

A：在許多情況下，鉛直基樁常需承受水平方向荷重，諸如地震、水力、或風力作用，以及由上層結構傳達而來之水平力量，早期基樁設計考慮基樁僅承受軸向力，因此遇有側向力作用情況，常需設計斜樁以承受此荷重，斜樁之裝設在施工上較為困難，而實際上亦難保證作用力一定保持在軸向作用，同時，事實上由於基樁本身具有相當之勁度存在，直樁應可承受某些程度的側向力，因此基於經濟與實際的理由，若能確知直樁承受側向力後之變形與應力變化，應可考慮利用直樁承受側向荷重。

預測直樁允許側向力之主要觀點，乃利用樁本身之勁度以及樁四周土壤之反作用等抵抗作用水平力，因此傳統之設計乃根據彈性基礎上橫樑之理論，如圖 34-1 所示，推求基樁受力後之變形及應力變化，其基本微分方程式為：

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + k_h \cdot y = 0 \quad (1)$$

上式中 EI 即分別為基樁本身之彈性係數及慣性矩， x 為樁於土層中之深度， y 為變形量， k_h 為地盤之水平反力係數 (Horizontal Sub-grade Reaction Coefficient)， $k_h \cdot y$ 項即代表地盤受樁水平力作用而生之反作用力，於基樁頂部懸空部份此項為零，圖 34-2 綜合不同邊界條件之解，其主要假設在地層之水平反力係數並不隨地層深度變化而增加，而樁身各點變

形量及彎距的大小則受樁頂之拘束條件而異 (Chang, 1937)。

至於對地層反力係數若隨地層深度之加深而增大時，即

$$k_h = \frac{n_h x}{D}$$

D 為樁直徑，Reese and Matlock (1956) 建議對式(1)修正，而提出另一系列之理論解，圖 34-3 即綜合設計所需之主要解，此計算式均為工程界所熟知，上二式中，因黏土層在有限深度內，地盤反力係數變化甚小，較適合 Chang 式狀況，而 Reese and Matlock 式則較適合砂質地層，其地盤反力係數隨深度變化之狀況，但就理論言之，此二式均未論及地層承受側向力之極限強度，意即假設土壤不生破壞情況下，基樁受側向力後之行為，因此基本上在樁長較長或土壤強度甚高之情況下較為適用，因

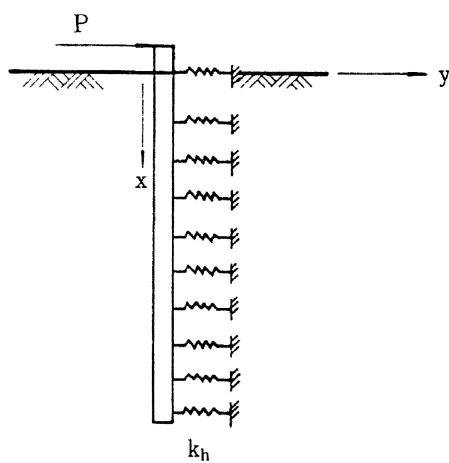


圖 34-1 彈性基礎上橫樑解

* 榮民工程事業管理處總工程司

變形曲線之 微分方程式	<p>地上部分 : $E\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ 地中部分 : $E\frac{d^4y}{dx^4} + P = 0$ $P = kDy$</p> <p>H : 桩水平作用力(kg) M₁ : 桩頂作用力矩(kg·cm) D : 桩徑(cm) $\frac{1}{4}\pi D^2$ E : 彈性係數(kg/cm²) I : 桩之斷面面積矩(cm⁴)</p> <p>K : 水平地盤反力係數(kg/cm³) h : H, M₁作用基樁頂離地面高程(cm)</p> <p>$\beta = \frac{kD}{4EI}$ (cm) $h_p = \frac{M_1}{H}$ (cm)</p>					
	樁之狀態	埋入地中之樁(h=0) (h=0)			突出地面之樁(h>0) (h>0)	
變位曲線圖 彎曲力矩圖	(1)基本情形	(2)樁頂拘束情形	(3)樁頂自由情形	(1)基本情形	(2)樁頂拘束情形	(3)樁頂自由情形
a	變形曲線y(cm)	$y = \frac{H}{2EI\beta^3} e^{\beta x} ((1+\beta h_i) \cos \beta x - \beta h_i \sin \beta x)$	$y = \frac{H}{4EI\beta^3} e^{\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$	$y = \frac{H}{2EI\beta^3} e^{\beta x} ((1+\beta h_i) \cos \beta x - \beta (h+h_i) \sin \beta x)$ $y_i = \frac{H}{2EI\beta^3} e^{\beta x} ((1+\beta (h+h_i)) \cos \beta x - \beta (h+h_i) \sin \beta x)$	$y = \frac{H}{2EI\beta^3} (2\beta^2 x^2 - 3(1-\beta h) \beta^2 x^2 - 6\beta^2 x + 3(1+\beta h))$ $y_i = \frac{H}{4EI\beta^3} e^{\beta x} ((1+\beta h) \cos \beta x + (1-\beta h) \sin \beta x)$	$y = \frac{H}{6EI\beta^3} (x^2 + 3\beta^2 h x^2 - 3\beta^2 (1+\beta h) x + 3(1+\beta h))$ $y_i = \frac{H}{2EI\beta^3} e^{\beta x} ((1+\beta h) \cos \beta x - \beta h \sin \beta x)$
b	樁頂位移量 δ (cm)	$\delta = \frac{H}{2EI\beta^3} + \frac{y_i}{2EI\beta^3} - \frac{1+\beta h_i}{2EI\beta^3} H$	$\delta = \frac{H}{4EI\beta^3} - \frac{\beta H}{KD}$	$\delta = \frac{H}{2EI\beta^3} = \frac{\beta^2 H}{KD}$	$\delta = \frac{1+2\beta h}{3EI\beta^3} H + \frac{1+\beta h}{2EI\beta^3} M_1$	$\delta = \frac{1+2\beta h}{12EI\beta^3} H$
c	地表位移量 f (cm)	$f = \delta$	$f = \delta$	$f = \delta$	$f = \frac{1+\beta h}{4EI\beta^3} H$	$f = \frac{1+2\beta h}{2EI\beta^3} H$
d	樁頂傾斜角 a (rad)	$a = \frac{H}{2EI\beta^3} + \frac{M_1}{EI\beta^3} - \frac{1+2\beta h}{2EI\beta^3} H$	$a = 0$	$a = \frac{H}{2EI\beta^3}$	$a = \frac{(1+\beta h)^2}{2EI(\beta^2+H)} + \frac{1+\beta h}{2EI\beta^3} M_1$	$a = 0$
e	樁各部份之彎曲力矩 M(kg·cm)	$M = -\frac{H}{\beta} e^{\beta x} (\beta h_i \cos \beta x + (1+\beta h_i) \sin \beta x)$	$M = -\frac{H}{2\beta} e^{\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x)$	$M_i = -H(x+h) - M_i = -H(x+h+h_i)$ $M_i = -\frac{H}{\beta} e^{\beta x} (\beta (h+h_i) \cos \beta x + (1+\beta (h+h_i)) \sin \beta x)$	$M_i = \frac{H}{2\beta} (-2\beta x + (1-\beta h))$ $M_i = \frac{H}{2\beta} e^{\beta x} ((1-\beta h) \cos \beta x - (1+2\beta h) \sin \beta x)$	$M_i = -H(x+h)$ $M_i = -\frac{H}{\beta} e^{\beta x} (\beta h \cos \beta x + (1+\beta h) \sin \beta x)$
f	樁各部份之剪力s(kg)	$S = -He^{\beta x} \cos \beta x - (1+2\beta h_i) \sin \beta x$	$S = -He^{\beta x} \cos \beta x$	$S_i = -H$ $S_i = -He^{\beta x} \cos \beta x - (1+2\beta (h+h_i)) \sin \beta x$	$S_i = -H$ $S_i = -He^{\beta x} (\cos \beta x - \beta h \sin \beta x)$	$S_i = -H$ $S_i = -He^{\beta x} \cos \beta x - (1+2\beta h) \sin \beta x$
g	樁頂彎曲力距Mo(kg·cm)	$M_o = -M_i = -Hh_o$	$M_o = \frac{H}{2\beta}$	$M_o = 0$	$M_o = -M_i = -Hh_o$	$M_o = \frac{1-2\beta h}{2\beta} H$
h	地中部份 Im 點處之彎曲 力距, Mm(kg·cm)	$M_m = -\frac{H}{\beta} e^{\frac{\pi}{2}} (-1 + 2\beta h_o)^2 - 1 \cdot \exp(-\beta l_m)$	$M_m = -\frac{H}{\beta} e^{\frac{\pi}{2}} = -0.2079 M_o$	$M_m = -\frac{H}{\beta} e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{4} = -0.2221 \frac{H}{\beta}$	$M_m = -\frac{H}{\beta^2} (1+2\beta(h+h_i))^2 + 1 \cdot \exp(-\beta l_m)$	$M_m = -\frac{H}{2\beta} (1+2\beta h)^2 \cdot \exp(-\beta l_m)$
i	ζ_m (cm)	$\zeta_m = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1}{1+2\beta h}$	$\zeta_m = \frac{\pi}{2\beta}$	$\zeta_m = \frac{\pi}{4\beta}$	$\zeta_m = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1}{1+2\beta(h+h_i)}$	$\zeta_m = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1}{\beta h}$
j	第1不動點深度 ζ(cm)	$\zeta = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1-\beta h}{\beta h}$	$\zeta = \frac{3\pi}{4\beta}$	$\zeta = \frac{\pi}{2\beta}$	$\zeta = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1-\beta(h+h_i)}{\beta(h+h_i)}$	$\zeta = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{1-\beta h}{\beta h}$
k	撓角為 D 之深度 L(cm)	$L = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} (-1+2\beta h_i)$	$L = \frac{\pi}{\beta}$	$L = \frac{3\pi}{4\beta}$	$L = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} (-1+2\beta(h+h_i))$	$L = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} (-\beta h)$
l	彈性常數	$K_{Ku} K_{Kw} K_{Ku} K_{Kw}$ $\varepsilon = \frac{H}{K_{Ku}} + \frac{N}{K_{Kw}}$ $\sigma = \frac{H}{K_{Ku}} - \frac{N}{K_{Kw}}$	$K_{Ku} = 2EI\beta^3 = \frac{kD}{2\beta}$ $K_{Kw} = K_{Ku} = 2EI\beta^2$ $K_{Kw} = K_{Ku} = K_{Kw} = \infty$	$K_{Ku} = 4EI\beta^3 = \frac{kD}{\beta}$ $K_{Kw} = K_{Ku} = \frac{kD}{2\beta}$	$K_{Ku} = \frac{3EI\beta^3}{(1+\beta h)^2 + \frac{1}{4}}$ $K_{Kw} = \frac{2EI\beta^2}{(1+\beta h)^2 + \frac{1}{4}}$ $K_{Kw} = \frac{EI\beta}{1+\beta h}$	$K_{Ku} = \frac{12EI\beta^3}{(1+\beta h)^2 + 2}$ $K_{Kw} = K_{Ku} = \infty$
						$K_{Ku} = \frac{3EI\beta^3}{(1+\beta h)^2 + \frac{1}{4}}$

圖34-2 側向荷重基樁理論解

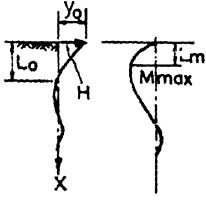
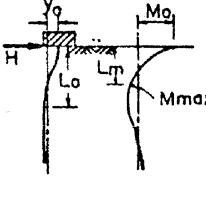
地盤反力係數之分佈		樁頂自由	樁頂之回轉受拘束時	備 考
				$\beta = \left(\frac{k_h D}{4EI} \right)^{1/4}$ (m ⁻¹ , cm ⁻¹) $\eta = \left(\frac{\eta_h}{EI} \right)^{1/5}$ (m ⁻¹ , cm ⁻¹) k_h = 水平地盤反力係數 (t/m ² /cm, kg/cm ³) L = 樁長 (m, cm) EI = 樁的彎曲剛性 $\eta_h = \frac{k_h D}{x}$ (t/m ² /cm, kg/cm ³) D = 樁直徑
(KhD=const)	樁頂之彎曲力矩 Mo	0	$\frac{H}{2\beta}$	Chang(1937)
	地中部份最大彎曲力矩 Mmax	$0.3224 \frac{H}{\beta}$	$0.104 \frac{H}{\beta}$	
	樁頂之水平位移 Yo	$\frac{H}{2EI\beta^3} = \frac{2H\beta}{k_h L}$	$\frac{H}{4EI\beta^3} = \frac{H\beta}{k_h L}$	
	Mmax之發生點之深度Lm	$\frac{\pi}{4\beta} = \frac{0.785}{\beta}$	$\frac{\pi}{2\beta} = \frac{1.571}{\beta}$	
	第1不動點之深度 Lo	$\frac{\pi}{2\beta} = \frac{1.571}{\beta}$	$\frac{3\pi}{4\beta} = \frac{2.356}{\beta}$	
(nh=const)	樁頂之彎曲力矩 Mo	0	$0.92 \frac{H}{\eta}$	Reese and Matlock(1956)
	地中部分最大彎曲力矩	$0.78 \frac{H}{\eta}$	$0.26 \frac{H}{\eta}$	
	樁頂之水平位移 Yo	$\frac{2.4H}{EI\eta^3} = \frac{2.4H\eta^2}{\eta_h}$	$\frac{0.93H}{EI\eta^3} = \frac{0.93H\eta^2}{\eta_h}$	
	Mmax之發生點之深度Lm	$\frac{1.32}{\eta}$	$\frac{2.15}{\eta}$	
	第1不動點之深度 Lo	$\frac{2.42}{\eta}$	$\frac{3.10}{\eta}$	

圖34-3 受水平力作用長樁應力及變形之理論解(EI=const)

此在某種情況可能使設計偏於保守，亦可能使設計趨向不安全。

純就理論觀點，綜視基樁承受側向荷重時，控制基樁承受側向荷重大小之主要因素，亦如承受垂直荷重基樁，一為土壤受水平推力之極限阻力，一為承受水平荷重基樁可允許之最大彎曲力矩，而樁頂受力後之水平位移量亦為

設計之另一控制因素，基於以上考慮因素，Broms(1965)提出基樁承受側向荷重後，其破壞形式如圖34-4及圖34-5情況，當基樁貫入土層中之深度有限時，基樁本身之勁度較土壤者為高，樁本身不易折斷，破壞之主因在於土壤之極限水平阻力不足以抵抗側向荷重，因此水平荷重之控制，應依土壤可提供之水平阻力推

求，當樁長增加時，則樁柔軟度增加，樁基受力彎曲破壞，因而樁本身允許之撓曲力矩即為設計之主要控制。

圖34-6及圖34-7分別表現於黏質及砂質土壤中，基樁承受側向荷重P後之應力發生情況，對黏質土壤而言，最大之水平阻力， P_{ult} ，發生於土層發生剪力破壞時之塑性平衡狀態，若黏土之不排水剪力強度為 C_u ，則此時阻力最小約等於 $2C_u$ ，最大達 $9C_u$ ，黏土層中並假設地表下1.5倍樁徑深度內之土層不具抗剪性，則

$$P_{ult} = 9C_u \cdot D \quad (2)$$

對砂土而言，則由被動土壓力控制，砂土層中復因本身之拱形效應(Arching Effect)，阻力尚更擴大，Broms假設阻力產生範圍約達直徑之三倍，則隨深度變化之極限阻力 P_{ult} 為

$$P_{ult} = 3K_p \sigma' v D \quad (3)$$

上式中 K_p =土壤之被動土壓係數

$\sigma' v$ =有效覆土壓力

由此反力產生情況推求基樁承受側向荷重之支承力關係如圖34-8至圖34-11所示，圖34-8及34-10為短樁之情形，受土壤之強度控制，圖34-9及圖34-11為長樁情形，受樁本身屈服力矩所控制，設計時應先根據土壤性質及基樁勁度判別基樁係屬長或短樁情況，再分別根據基樁屈服力矩或土壤之強度，按上述各圖表查得每單位之數值 $P/C_u \cdot D^2$ 或 $P/K_p \cdot D^3 r$ ，再推求P值，圖34-8至圖34-11中， C_u 為黏土層之不排水剪力強度， K_p 為砂土層之被動土壓係數，P代表基樁承受之水平荷重即水平支承力，M代表基樁之屈服力矩，D為基樁直徑， r 為土壤之單位重，L為樁長，f為發生最大彎矩之深度。

因而根據此假設綜合可得，在黏土層中，如樁預受拘束，則短樁之最大水平支承力 P_u 及樁身最大彎矩 M_{max} 分別為

$$P_u = 9C_u D (L - 1.5D) \quad (4)$$

$$M_{max} = P_u (0.5L + 0.75D) \quad (5)$$

至於長樁則受允許彎矩 M_y 控制，此時基

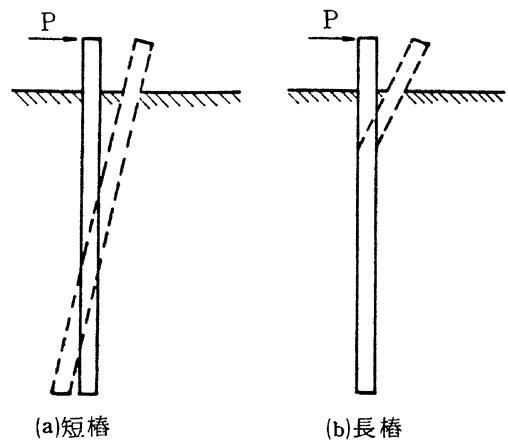


圖34-4 頂部自由基樁破壞模式

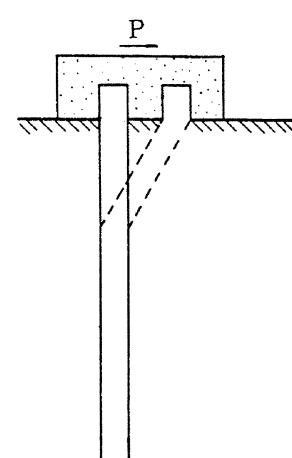
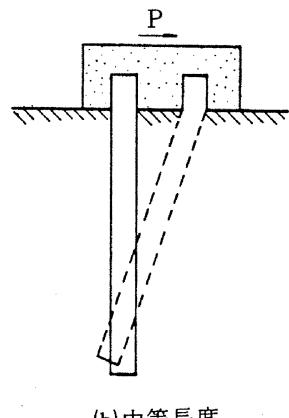
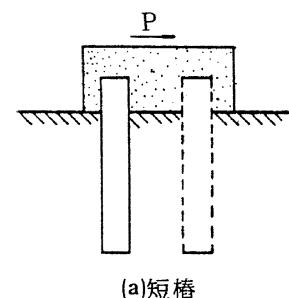


圖34-5 頂部拘束基樁破壞模式

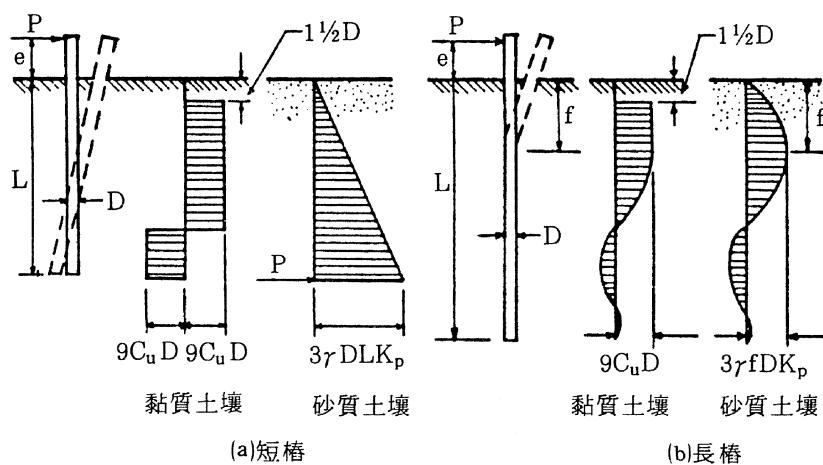


圖34-6 頂部自由基樁反力情況

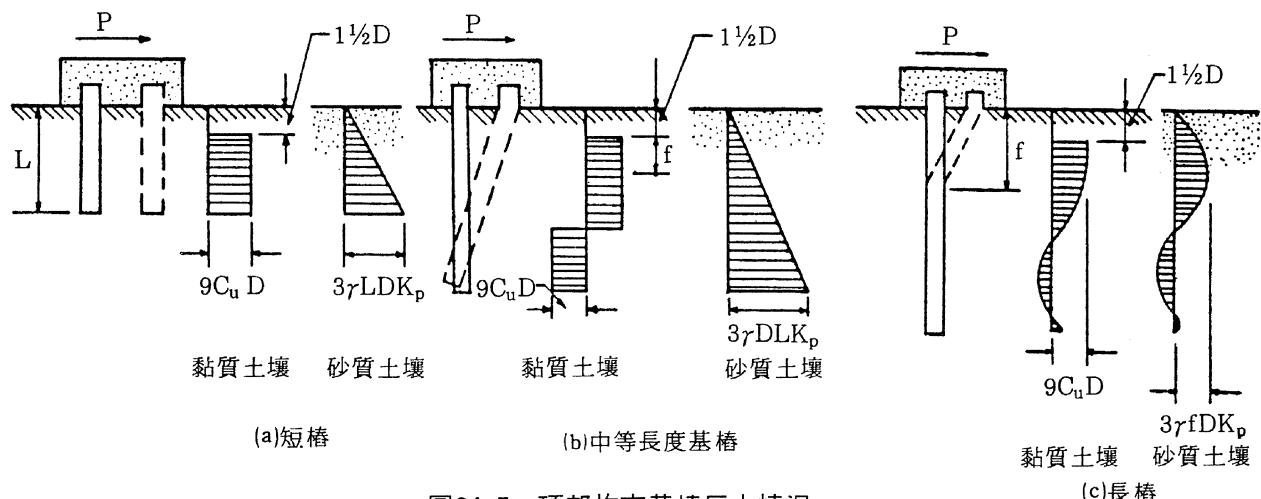


圖34-7 頂部拘束基樁反力情況

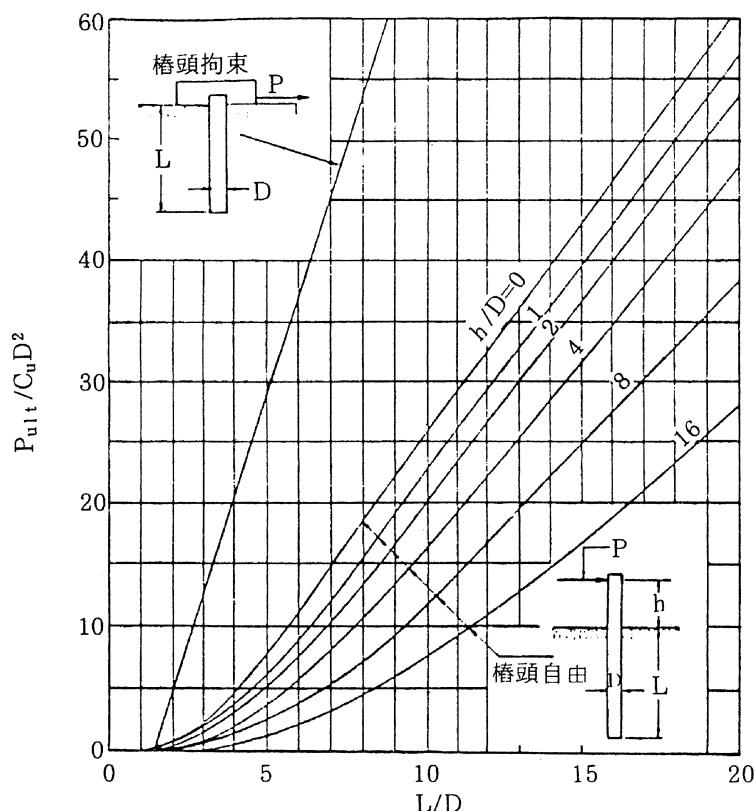


圖34-8 黏土質地盤短樁之極限側向抗力

樁之水力支承力則為

$$P_u = \frac{2My}{(1.5D + 0.5f)} \quad (6)$$

對砂土層而言，如樁頂受拘束，短樁之最大水平承力則為

$$P_u = 1.5\gamma L^2 DK_p \quad (7)$$

最大彎矩為

$$M_{max} = \frac{2}{3} P_u L \quad (8)$$

對長樁而言，則

$$P_u = \frac{0.5\gamma DL^2 K_p - My}{L} \quad (9)$$

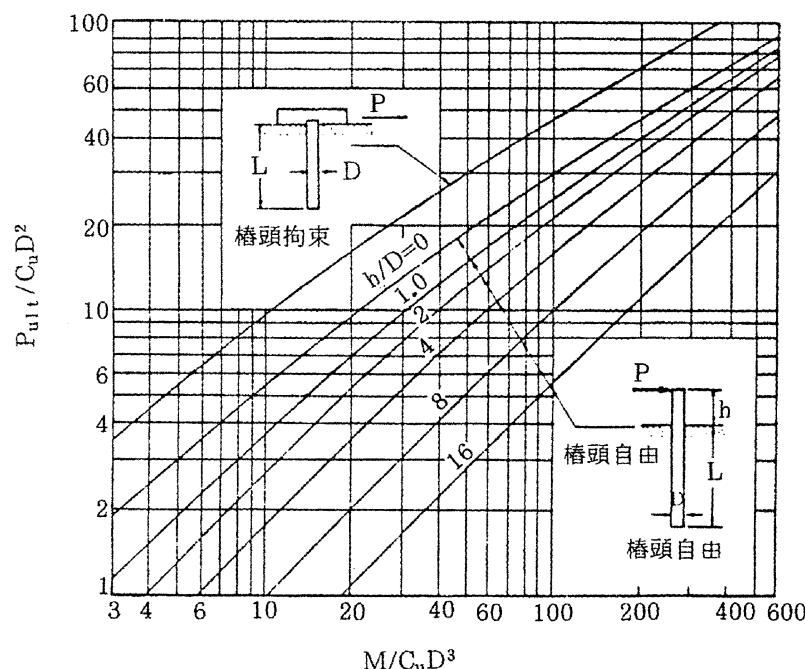


圖34-9 黏土質地盤長樁之極限側向抗力

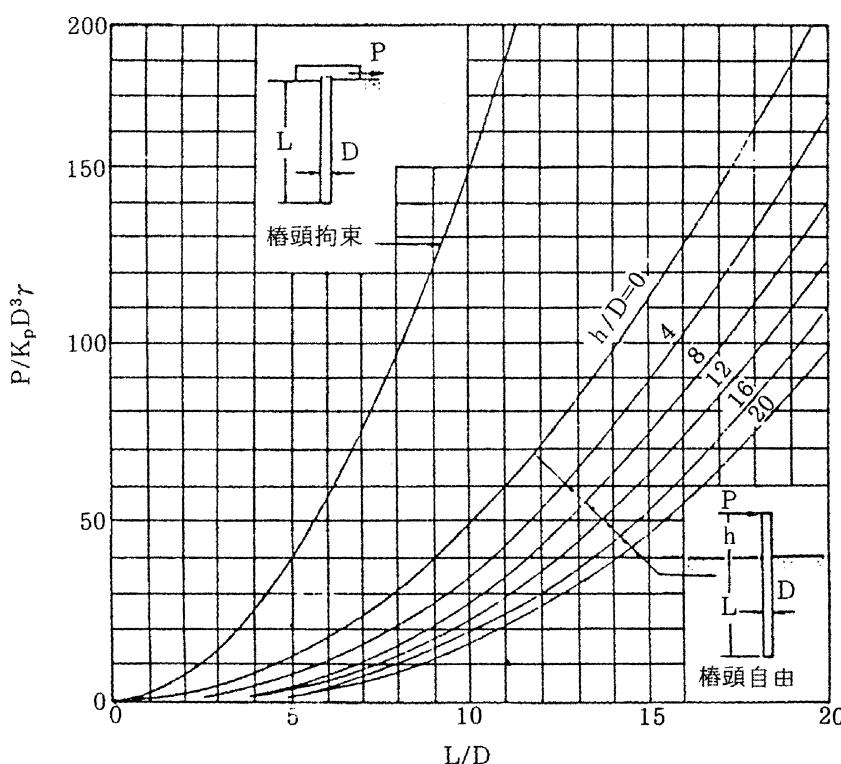


圖34-10 砂質地盤短樁之極限側向抗力

而長短樁之判別，得由樁本身之勁度(EI)、樁斷面大小以及土壤性質判別之，對黏土情形，考慮樁變形因數 β 。

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K_h D}{4EI}} \quad (10)$$

上式中 K_h = 黏土層之水平地盤反力係數

D = 樁直徑

E = 樁材單性模數

I = 樁之慣性矩(Moment of Inertia)

當 βL 小於2.25時視為短樁， βL 大於2.25時視為長樁， L 為樁之入土長度。

於砂土層中則由 η 值判別之， η 值定義為

$$\eta = \sqrt[5]{\frac{n_h}{EI}} \quad (11)$$

上式中 n_h 代表砂土層之水平地盤反力係數，隨深度而變化，對砂土層而言當 ηL 小於2時視為短樁， ηL 大於4時則視為長樁。

基樁承受水平荷重之設計亦須對基樁受力後頂部之水平移動量加以限制，Broms亦根據

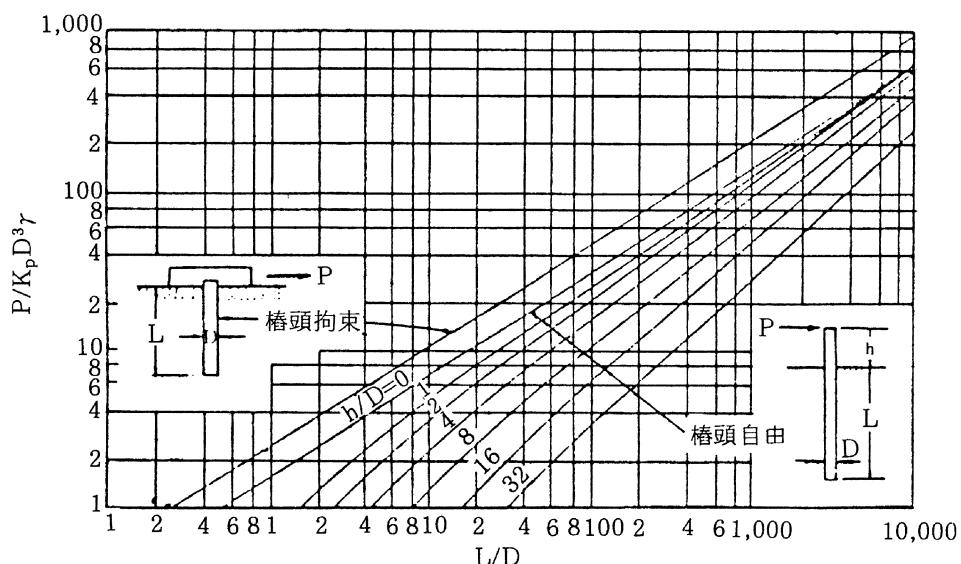


圖34-11 砂質地盤長樁之極限側向抗力

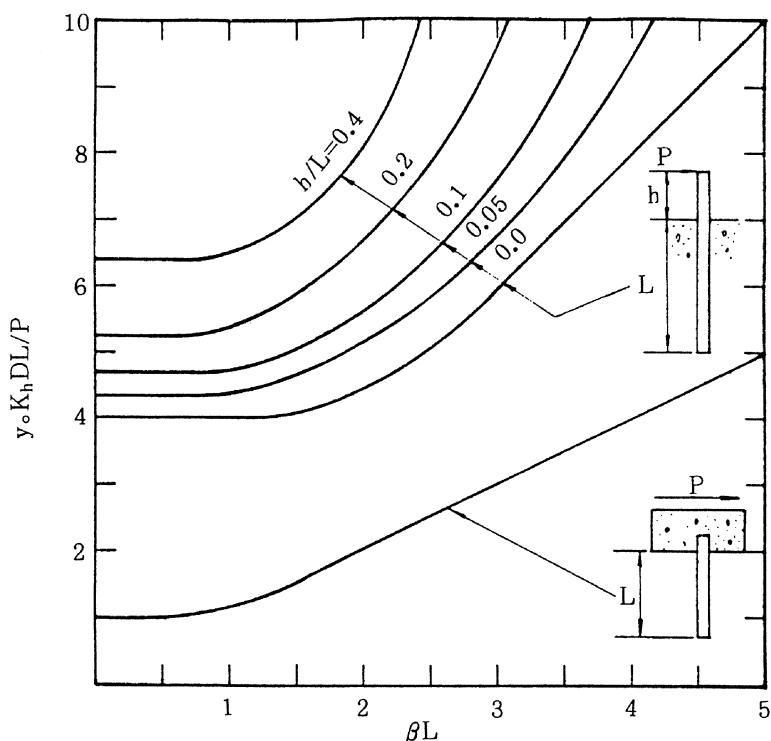


圖34-12 黏土質地盤地表處之側向變形量

其理論提出推求基樁頂部水平移動量之簡易圖表如圖 34-12 及圖 34-13 所示，該二圖中之 y_o 代表樁頂受側向力 P 作用下之水平位移值，設計選定水平移值之大小以不使上部結構物發生破壞為原則，Broms建議方法之計算甚為簡便

，其考慮基本原理較為合理，在近年來大致已為工程界所接受，其預估值與現場試驗結果比較，發現Broms方法之推估值較實測值較偏低約30%，其主要原因可能在對拱形效應而生之被動土體範圍較難確實掌握，Reese(1974) 亦

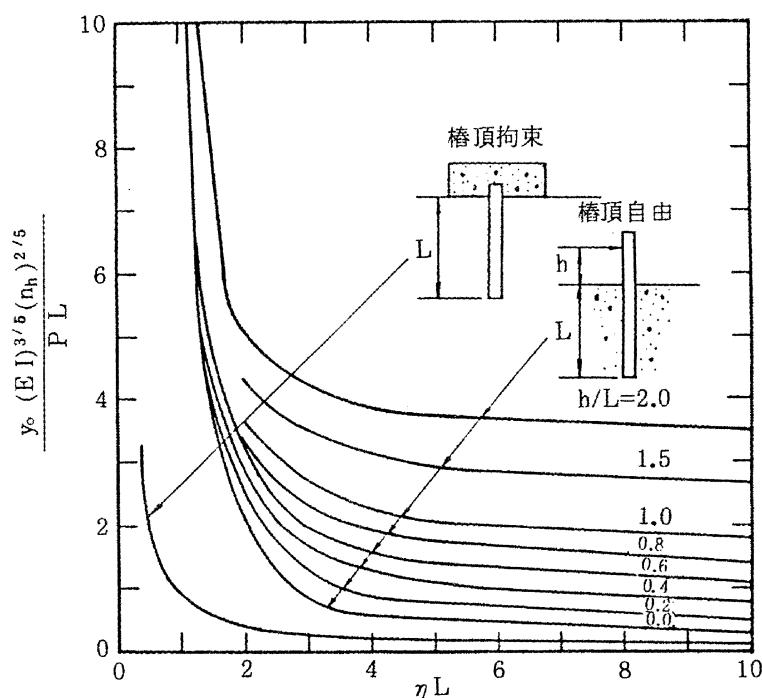


圖34-13 砂質地盤地表處之側向變形量

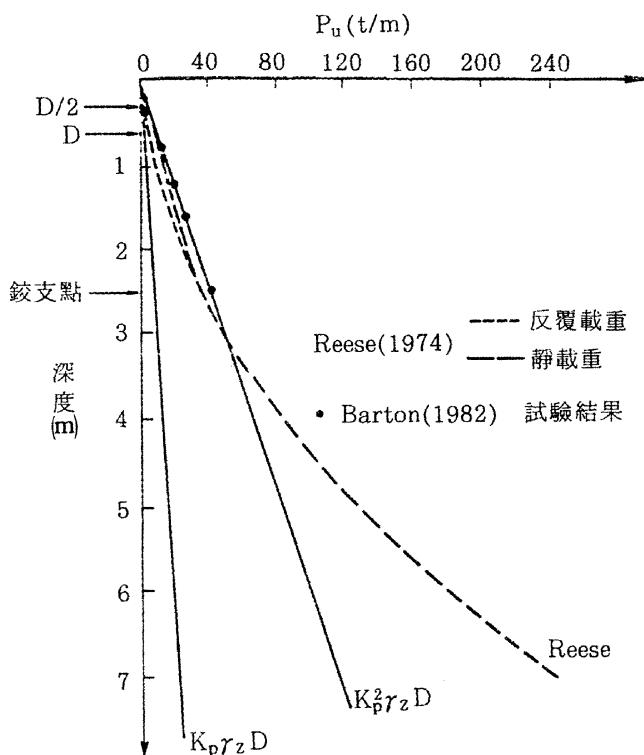


圖34-14 側向荷重基樁水平阻力變化

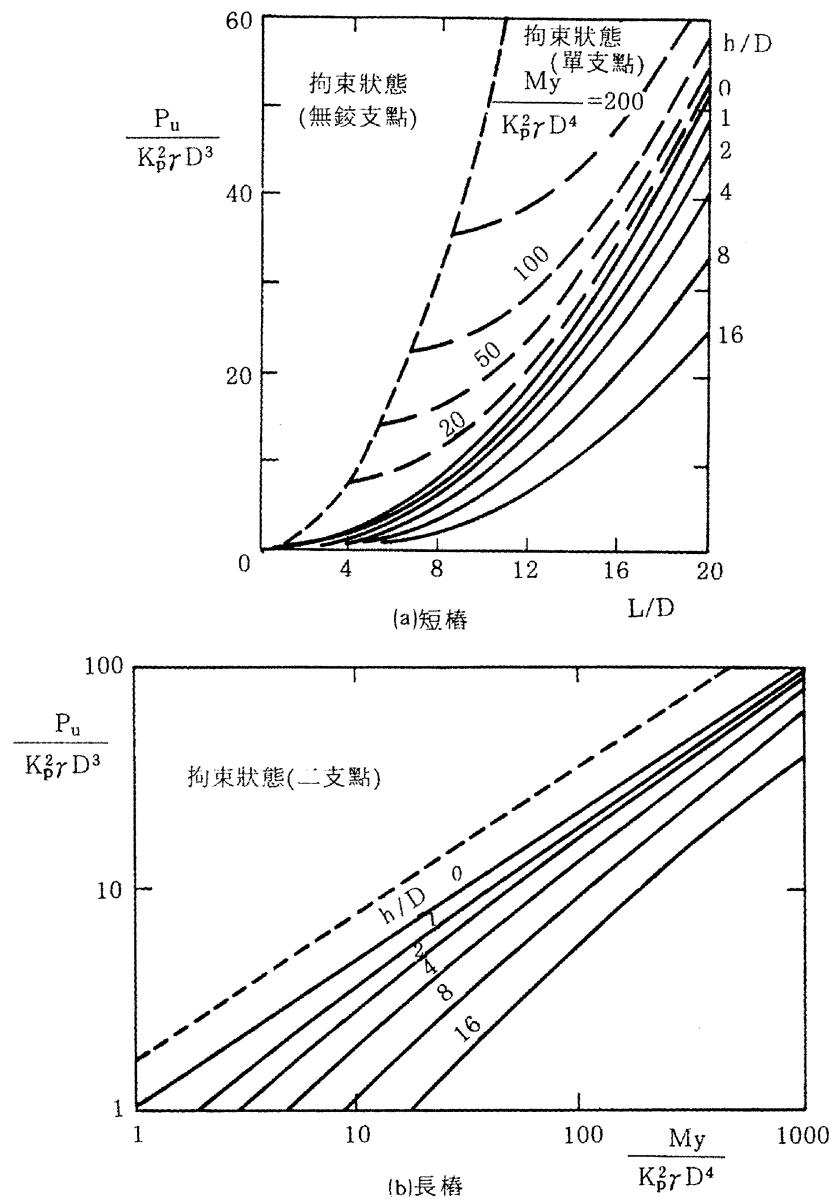


圖34-15 砂質土中鉛直樁側向力設計圖

會建議將被動土壓 P_u 之變化，於樁基較淺時與 K_p 成正比增加，而於較大深度時則與 K_p 成正比，圖 34-14 顯示側壓樁隨深度之壓力變化狀況，因此亦有建議依 K_p^2 比例變化者，即

$$P_u = K_p^2 \delta' \nu D \quad (12)$$

英國劍橋大學會利用離心模型試驗法分析側壓樁之行為，而另建議如圖 34-15 之計算法，而試驗結果較推估值約高出 6 % 範圍。

於側壓樁之設計中，影響預測值之重要因素之一為土壤參數，而在利用地盤反力係數之傳統計算法中，地盤反力係數之推估更是一主要控制，目前已有許多學者專家對此問題進行研究，讀者欲進一步了解可參閱：

- (1)Broms, B. B.,(1965), "Design of Laterally Loaded Piles" Proc. ASCE, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, Vol. 91, No.SM3, pp.79-99
- (2)Poulos, H. G.(1971)" Behaviour of Laterally Loaded Piles: I-single Pile," Proc. ASCE, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, Vol.97, SM5, pp. 711-731
- (3)Poulos, H. G.(1973) "Analysis of Piles in Soil Undergoing Lateral Movement." Proc. ASCE, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, Vol. 99, SM5, pp.391-406