地工技術雜誌　第16期
民國75年10月　第80～81頁
Sino-Geotechnics No.16
October 1986, PP.80～81

Q與A專欄

歐　晉　德*

本問題與解答專欄將定期於本刊登出，所擬問題均選自目前大地工程界於施工中可能遭遇之一些疑難小問題，此類問題雖小，但常造成施工人員之困擾。本欄歡迎名讀者提出問題，並歡迎學者專家就解答內容提供意見。有鑑於大地工程牽涉範圍及變化甚多，讀者亦請避免將本欄提供之解答視為唯一方案，以免造成施工或尋求解決方法之錯誤。

Q32. 何謂半無限長？無限長？其假設條件爲何？且其力學特徵爲何？請予說明。（台北市林郁人先生提供）

A.此問題較偏向理論性，我們可以分三階段來分析這個問題：

I.數學上的定義{1}：

若把實數的集合，E_1，再加上兩個理想點，構成延伸的實數集合，E_1^*。這兩個理想點分別以$+\infty$及$-\infty$來表示。如果$X\in E_1$，則$-\infty<X<+\infty$。因此無限是一個定義，沒有相對的假設條件，而半無限則可以看成“從任何一個$X\in E_1$到$+\infty$(或$-\infty$)的點集合”，如時間即是一個很適當的例子，因從任何一時間$t=t_0$到$t=\infty$均是一個半無限集合。通常我們用∞代表$+\infty$。

Ⅱ.在一般工程應用上，因理論的簡化，所謂半無限長常係指邊界條件而言，如

1. 無限長的問題，往往是透過幾何對稱，簡化成半無限長來處理，這個半無限長的起點就是座標的原點。
2. 在$X=\infty$或$t=\infty$時，理想化的邊界條件很容易判斷，許多描述物理現象的變數，在數學模擬式中，當$X=\infty$或$t=\infty$時，是一個有限值(往往是零)，因此數學解中，經常出現$1/X, e^{-x}, 1/t, e^{-t}$之類的項次。
3. 利用無限長的觀念，可以簡化數學模擬的空間因次，將三度空間化簡成二度甚至一度。

Ⅲ.在大地工程中應用半無限長、無限長等邊界條件之相關例子：

1. 彈性基礎上的無限長樑{2}

在條形基礎之設計上，當基礎安置於地層上，地層本身即可視爲一半無限之平面(Semi-Infinite Plane)，而地樑本身即可視爲一無限長樑，這類問題的數學模擬可以式(1)來表示：

$$EI_z\frac{d^4y}{dx^4}=-ky \tag{1}$$

其中K是地盤反力係數，y是地樑變形之垂直撓度，E, I_z爲樑本身之強度及斷面性質，此時式(1)的通解

$$y=e^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x) \tag{2}$$

如果是單點荷重，我們取受力點爲原點，因對稱關係，只須分析半無限長$(x\geqslant0)$即可。在邊界條件方面，可以合理的假設距離受力點無限遠處的撓度$1/_{x=\infty}=0$而且其斜率$\left.\frac{d_y}{d_x}\right|_{x=\infty}=0$。由於式(2)右邊第一項含有$e^{\beta x}$因式，我們可以立刻看出A和B必須等於0才可能滿足上述兩個邊界條件，這樣利用無限長的特性，我們能立刻將式(2)化簡成

$$y=e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$$

2. 無限長條形基礎下的應力分佈{3}：

如果該無限長條形基礎受均佈荷重，則在所有橫切該基礎之土壤斷面上的應力分佈是一樣的，這樣就可以把原本是三度空間的問題，簡化成二度的。在實際工程上雖然只有狹長的條形基礎，但只要基礎的長寬比值大於某一數值(比方說10)，我們可以將它視爲無

* 亞新工程顧問公司副總經理

限長條形基礎來分析，只要分析的斷面不是太接近狹長基礎的兩端，得到的結果在工程設計上是可接受的，另外類似的例子有土石壩滲流分析，邊坡穩定分析等等，只要條件適合(幾何及受力狀態)都可以合理的化簡成二度空間問題來處理，最典型的實例，如公路設計，路堤填方之沉陷計算中，常視爲半無限平面上，承受無限長之條件荷重，而計算其應力分佈值，用以推估沉陷量。

3. 一度空間的壓密沉陷{4}

Terzaghi建議之一度空間壓密公式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (3)$$

根據壓密係數Cv，計算地層各深度z中孔隙水壓u隨時間t之消散率，應用於地表面上大面積荷重時的壓密沉陷分析，在理論上，大面積是指平面x與y方向都是無限長，而實際應用上，只要荷重面積的短邊長數倍於壓密土層深度時，式(3)已可提供實用的解答，這種x、y近似無限長的例子，把一個三度空間的問題化簡成一度的。

又式(3)的解是

$$u = \frac{4}{\pi} P_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\right] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 C_v t/4H^2} \quad \cdots\cdots(4)$$

從式(4)我們可以立刻看出當t=∞時，土壤中任何一點的u都是0，換句話說壓密行爲“差一點”是永遠進行的，所差的那一點，就是時間半無限長集合中t=∞的那一點。(盛若磐)

有關以上之說明，讀者可進一步參考以下資料：

1. Apostol, T.M. (1957) “Mathematical Analysis”, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.
2. Hetenyi, M. (1946) “Beams on Elastic Foundations” The University of Michigan Press, U.S.A.
3. Poulos, H.G. and Davis, E.H. (1974) “Elastic Solution for Soil and Rock Mechanics”, John Wiley and Sons, U.S.A.
4. Terzaghi, K. (1943) “Theoretical Soil Mechanics”, John Wiley and Sons, U.S.A.